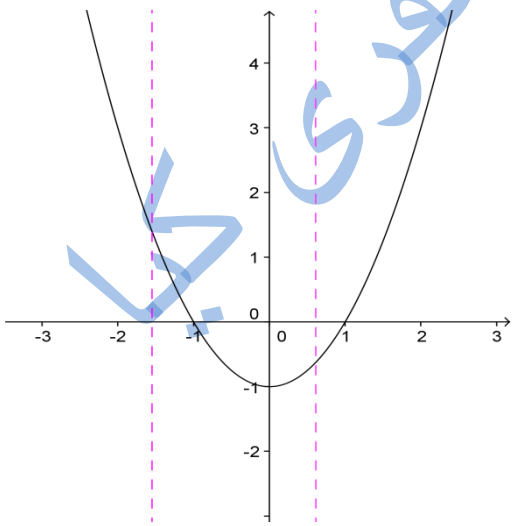
فصل دوم: تابع

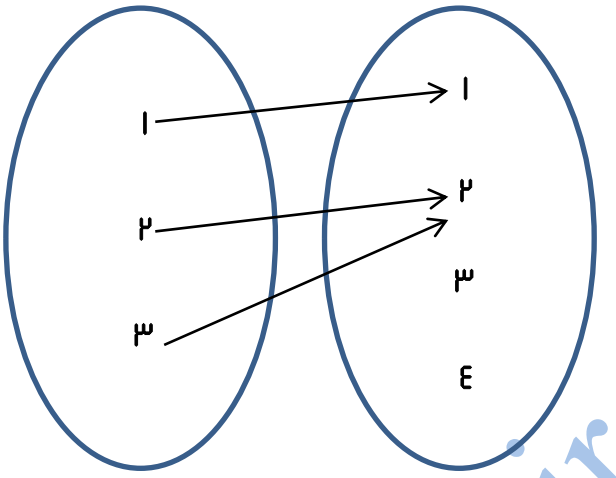
*** یادآوری: تشخیص تابع**

* یک رابطه در صورتی تابع می باشد که هیچ دو مولفه اول برابری نداشته باشد، نظیر : $f=\{(۱,۵),(۰,-۱),(۲,۵)\}$

و در شکل هر خطی که موازی محور y ها رسم شود، تابع را نهایتا در یک نقطه قطع کند، نظیر:



و در نمودار ون آن از هر عضو مجموعه اول دقیقا یک عضو خارج شود. نظیر:



در حالت کلی هر تابع از سه جزء تشکیل شده است: دامنه (A)، هم دامنه (B) و ضابطه یا دستور تابع $(f(x))$.

$$f: A \to B$$
$$x \mapsto f(x)$$

[هم دامنه لزوما برابر برد تابع نمی باشد.]

* مثال: تابع $f(x)=\frac{x}{x+۲}$ را داریم، حاصل $f(۰)$ و $f(-۳)$ را بیابید.

$$f(-۳)=\frac{-۳}{-۳+۲}=۳ \quad \text{و} \quad f(۰)=\frac{۰}{۰+۲}=۰$$

*** تساوی دو تابع:**

* دو تابع f و g مساویند هرگاه: الف) $D_f=D_g$ ب) $\forall x\in D_f \Rightarrow f(x)=g(x)$

* مثال: کدام دسته از توابع زیر مساویند؟

* $\begin{cases} f(x)=۲x-۱ \\ g(x)=\frac{٤x-۲}{۲} \end{cases}$ * $\begin{cases} f(x)=x+۱ \\ g(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱} \end{cases}$

$$\begin{cases} f(x)=x+۱ \Rightarrow D_f=\mathbb{R} \\ g(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱} \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{۱\} \end{cases}$$

مساوی نیستند چون: $D_f \neq D_g$

$$\begin{cases} f(x)=۲x-۱ \Rightarrow D_f=\mathbb{R} \\ g(x)=\frac{٤x-۲}{۲} \Rightarrow D_g=\mathbb{R} \end{cases}$$

چون هر دو شرط برابری برقرار است پس دو تابع مساویند.

www.mclass.ir
جعفری کیا

*** توابع چند ضابطه ای:**

* توابعی که برای قسمت های مختلف دامنه آن دستور های مختلفی وجود دارد را چند ضابطه ای می گوییم.نظیر:

$$f(x)=\begin{cases} x+6 & x<0 \\ 2x & x\geq 0 \end{cases}$$

*** معادلات و توابع:**

* با توجه به تعریف تابع معادلاتی تابع هستند که در ازای هر x از دامنه فقط یک مقداربرای تابع بدست آید.مثلامعادله $y^2+4=x$ تابع نیست زیرا:

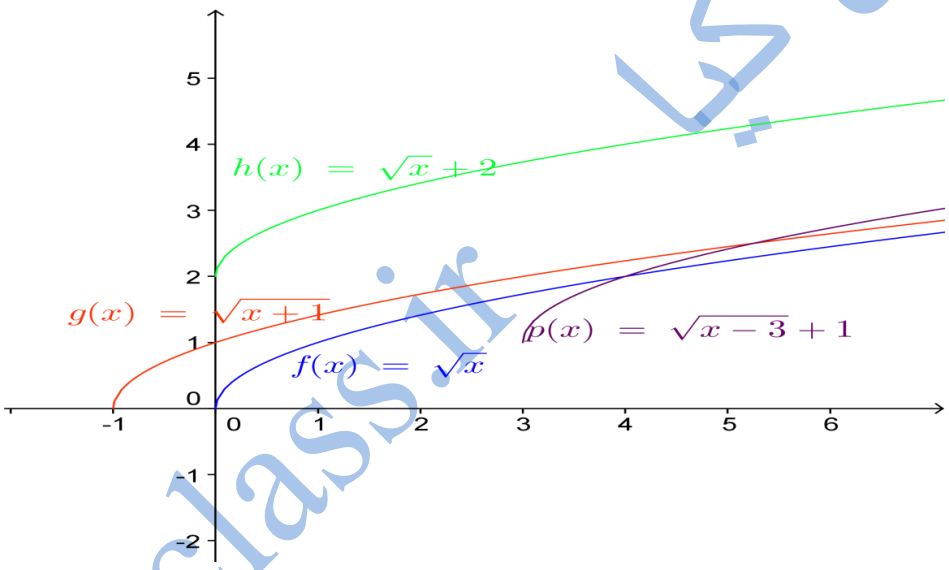
$$y^2+4=x$$

$$x=8\Rightarrow y^2+4=8\Rightarrow y=2\vee y=-2$$

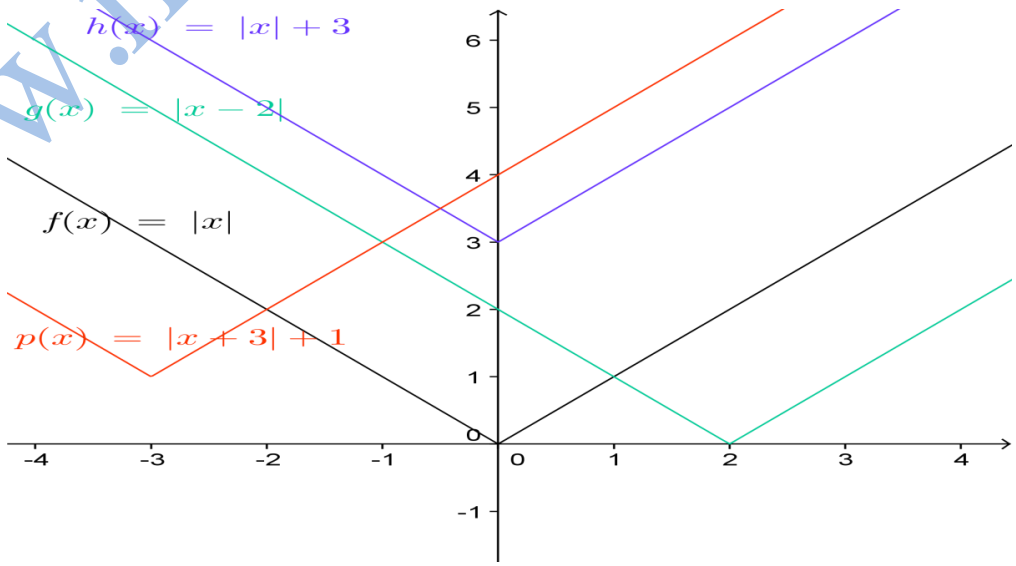
*** رسم توابع:**

* از طریق انتقال توابع می توان بسیاری از توابع مختلف را رسم کرد.

* مثال: توابع $y=\sqrt{x+1}, y=\sqrt{x}+2, y=\sqrt{x-3}+1$ را با توجه به نمودار $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.



* مثال: توابع $y=|x-2|, y=|x|+4, y=|x+3|+1$ را با توجه به نمودار $y=|x|$ رسم کنید.

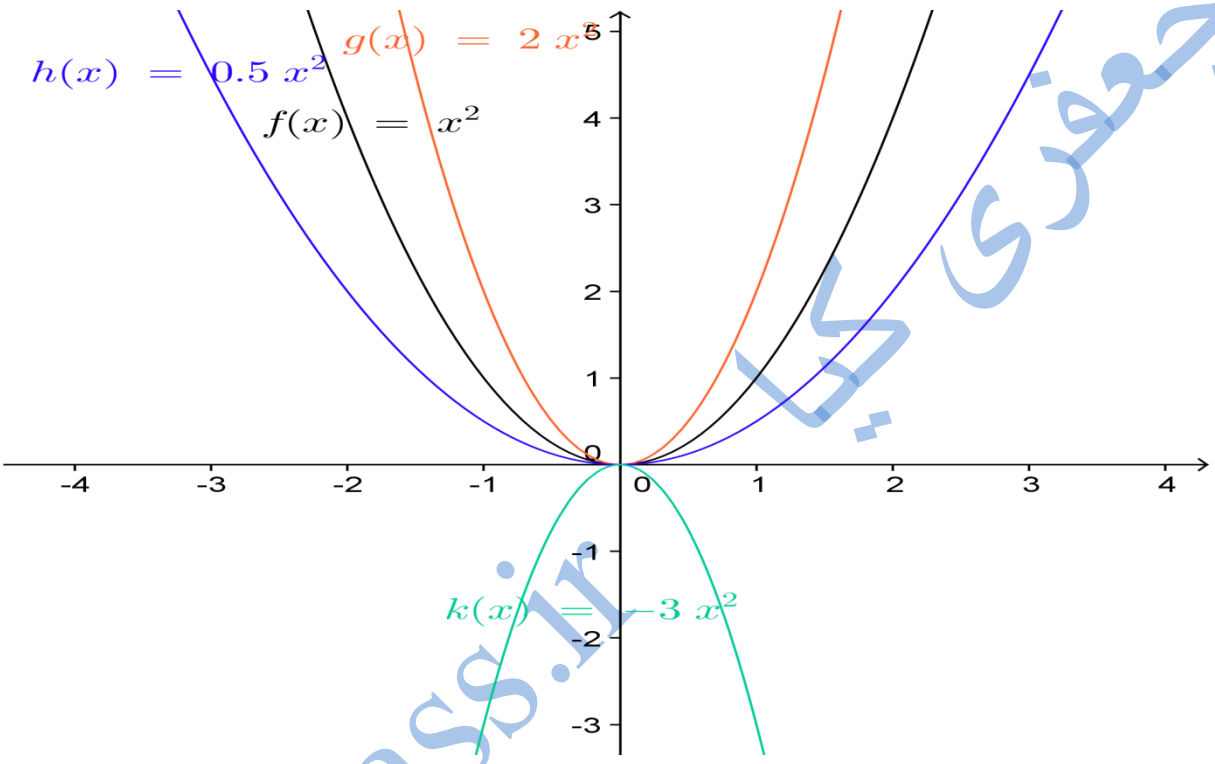


www.mclass.ir جعفری کیا

* تذکر: برای رسم تابع $af(x)$ بر اساس تابع: $f(x)$ داریم:

اگر $a>1$ نمودار تابع به صورت عمودی با ضریب a کشیده می شود[انبساط عمودی] و اگر $0<a<1$ نمودار تابع به صورت عمودی با ضریب a جمع می شود[انقباض عمودی] و اگر $a<0$ ابتدا نمودار تابع نسبت به محور x ها قرینه می شود و سپس به اندازه $|a|$ منقبض یا منبسط می شود.

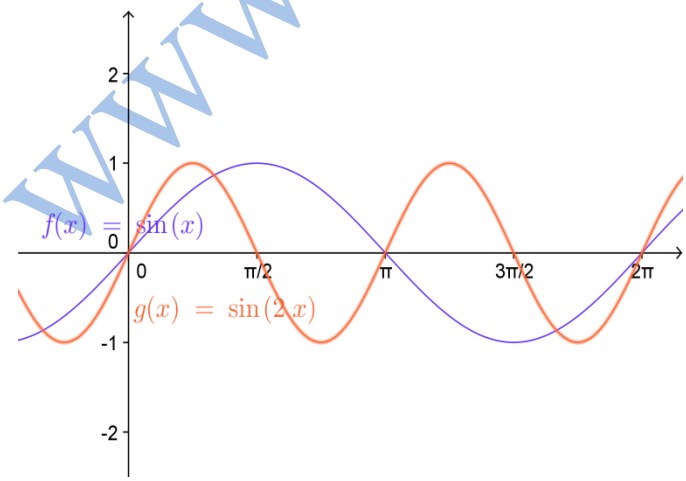
* مثال: توابع $y=2x^2, y=\frac{1}{2}x^2, y=-3x^2$ را با توجه به نمودار $y=x^2$ رسم کنید.

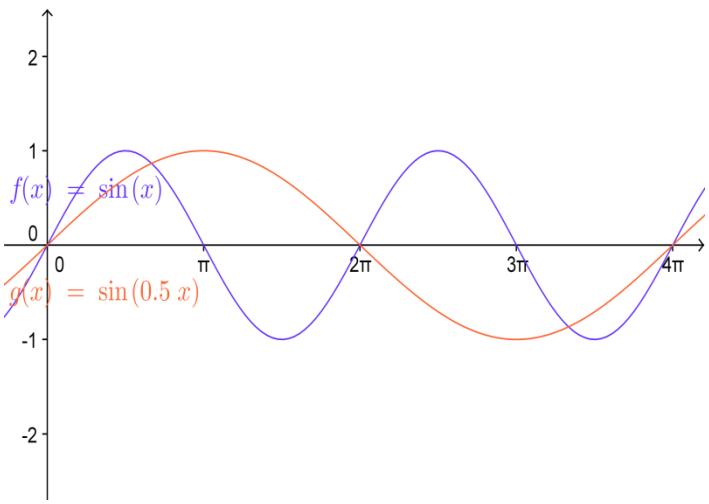


* تذکر: برای رسم تابع $f(ax)$ [که a عددی حقیقی و مثبت است] بر اساس تابع $f(x)$ داریم:

اگر $a>1$ نمودار تابع به صورت افقی با ضریب a جمع می شود[انقباض افقی] و اگر $0<a<1$ نمودار تابع به صورت افقی با ضریب a کشیده می شود[انبساط افقی]

* مثال: توابع $y=\text{Sin}(2x), y=\text{Sin}(\frac{1}{2}x)$ را با توجه به نمودار $y=\text{Sin}x$ رسم کنید.

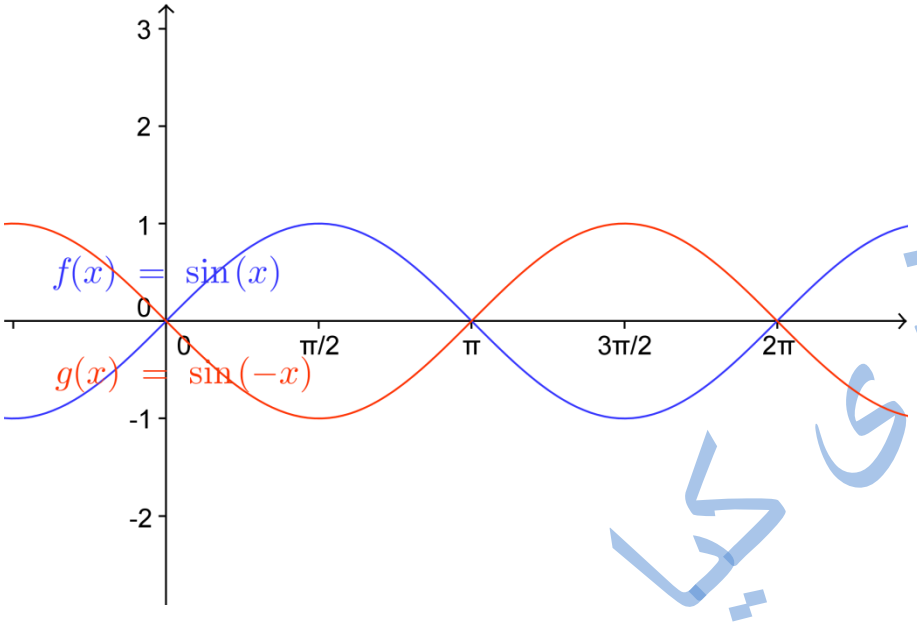




www.mclass.ir
جعفری کیا

* تذکر: برای رسم تابع $f(-x)$ بر اساس تابع: $f(x)$ کافیست نمودار تابع را نسبت به محور y ها قرینه کنیم.

* مثال: توابع $y = Sin(-x)$ را با توجه به نمودار $y = Sinx$ رسم کنید.



*** اعمال جبری روی توابع:**

* چهار عمل اصلی روی توابع و دامنه آن ها به صورت زیر انجام می شود:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \quad , D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) \quad , D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f\times g)(x) = f(x)\times g(x) \quad , D_{f\times g} = D_f \cap D_g$$

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x) \quad , D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\}$$

* مثال: اگر $f(x) = \frac{x}{x^۲+۱}, g(x) = \sqrt{۲x-۳}$ باشد، حاصل عبارات $۲f\times g, g/f, f+g$ را بیابید و دامنه آن ها را بیابید.

$$D_f = \mathbb{R}, D_g = \left[\frac{۲}{۳}, \infty\right)$$

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \frac{x}{x^۲+۱} + \sqrt{۲x-۳}, \quad , D_{f+g} = D_f \cap D_g = \left[\frac{۲}{۳}, \infty\right)$$

$$(۲f\times g)(x) = ۲f(x)\times g(x) = \frac{۲x}{x^۲+۱}\times\sqrt{۲x-۳} \quad , D_{f\times g} = D_f \cap D_g = \left[\frac{۲}{۳}, \infty\right)$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{۲x-۳}}{\frac{x}{x^۲+۱}} = \frac{(\sqrt{۲x-۳})(x^۲+۱)}{x}$$

$$D_{g/f} = D_g \cap D_f - \{x \mid f(x) = ۰\} = \left[\frac{۲}{۳}, \infty\right) - \{۰\} = \left[\frac{۲}{۳}, \infty\right)$$

www.mclass.ir
جعفری کیا

* مثال:اگر $f=\{(0,1),(2,1),(1,1)\}$ و $g=\{(1,-5),(3,4),(2,5)\}$ باشد حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$f+g=\{(1,1-5),(2,1+5)\}=\{(1,-4),(2,6)\}$$
$$f\times 2g=\{(1,1\times -10),(2,1\times 16)\}=\{(1,-10),(2,16)\}$$
$$g/f=\{(1,\frac{-5}{1}),(2,\frac{5}{1})\}=\{(1,-5),(2,5)\}$$

*** ترکیب توابع:**

* ترکیب توابع به نوعی همان مقدار دهی توابع می باشد و بصورت $(fog)(x)=f(g(x))$ تعریف می شود.در مورد دامنه fog فرمول مقابل را داریم: $D_{fog}=\{x|x\in D_g, g(x)\in D_f\}$. واضح است که برای یافتن دامنه fog ابتدا می توان رابطه fog را بدست آورد و سپس دامنه را محاسبه کرد.

* مثال: توابع $f(x)=4x-1$ و $g(x)=\frac{x+1}{2}$ را داریم. عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$(fog)(x)=f(g(x))=4(g(x))-1=4\left(\frac{x+1}{2}\right)-1=2x+3$$
$$(fof)(x)=f(f(x))=4(f(x))-1=4(4x-1)-1=16x-5$$
$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{f(x)+1}{2}=\frac{4x-1+1}{2}=2x$$

* مثال: توابع $f(x)=4+x$ و $g(x)=\sqrt{2x+1}$ را داریم. عبارات خواسته شده را محاسبه کنید.

$$(gof)(x)=g(f(x))=\sqrt{2f(x)+1}=\sqrt{2x+9}$$
$$D_{gof}=\{x|x\in D_f, f(x)\in D_g\}=\{x|x\in\mathbb{R}, 4+x\in\left[-\frac{1}{2},\infty\right)\}=\{x|x\in\mathbb{R}, x>-\frac{1}{2}-4\}=\left[-\frac{9}{2},\infty\right)$$

* مثال: اگر $g(x)=x^2-1$ و $(gof)(x)=x+3$ باشد، $f(x)$ را بیابید.

$$\begin{cases}(gof)(x)=x+3\\ g(x)=x^2-1\Rightarrow g(f(x))=(f(x))^2-1\end{cases}\Rightarrow (f(x))^2-1=x+3\Rightarrow f(x)=\pm\sqrt{x+4}$$

*** توابع زوج و فرد:**

* توابعی که نمودار آن ها نسبت به محور y ها متقارن باشند توابع زوج و توابعی که نمودار آن ها نسبت به مبدا مختصات متقارن باشند توابع فرد می نامیم. و همچنین تابعی زوج است که دامنه آن متقارن باشد و $f(-x)=f(x)$ و تابعی زوج است که دامنه اش متقارن باشد و $f(-x)=-f(x)$.

* مثال: زوج یا فرد بودن توابع زیر را مشخص کنید.

$$\begin{cases}f(x)=x^2-6\Rightarrow D_f=[-\sqrt{6},\sqrt{6}]\\ f(-x)=(-x)^2-6=x^2-6=f(x)\end{cases}\Rightarrow \text{زوج}$$

$$\begin{cases}f(x)=|x+4|+|x-4|\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\\ f(-x)=|-x+4|+|-x-4|=|x-4|+|x+4|=f(x)\end{cases}\Rightarrow \text{زوج}$$

$$\begin{cases}f(x)=\text{Sin}^3x+\frac{x}{2}\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\\ f(-x)=\text{Sin}^3(-x)+\frac{-x}{2}=-(\text{Sin}^3x+\frac{x}{2})=-f(x)\end{cases}\Rightarrow \text{فرد}$$

$$\begin{cases}f(x)=\{(2,0),(0,0),(-2,0)\}\Rightarrow D_f=\{2,0,-2\}\\ f(-x)=f(x)\end{cases}\Rightarrow \text{زوج}$$

*** توابع صعودی و نزولی:**

* اگر با افزایش مقدار x مقدار تابع نیز افزایش یابد تابع صعودی نامیده می شود. و داریم:

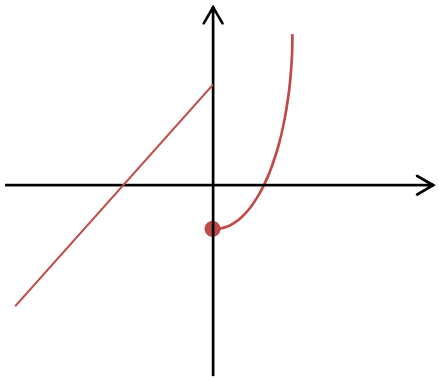
صعودی اکید $\forall x_1,x_2\in D_f, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ صعودی $\forall x_1,x_2\in D_f, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$

و اگر با افزایش مقدار x مقدار تابع کاهش یابد تابع نزولی نامیده می شود. و داریم:

نزولی اکید $\forall x_1,x_2\in D_f, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$ نزولی $\forall x_1,x_2\in D_f, x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)\ge f(x_2)$

* مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید، دامنه و برد آن را مشخص کنید و مشخص کنید در کجا صعودی و در کجا نزولی است.

$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x\ge 1 \\ 4-x & x<1 \end{cases}$$



با توجه به شکل در همه جا تابع اکیدا صعودی است و

$D_f=R_f=\mathbb{R}$

*** توابع ثابت:**

تابعی ثابت نامیده می شود که برد آن فقط از یک نقطه تشکیل شده باشد. یعنی: $\forall x_1,x_2\in D_f \Rightarrow f(x_1)=f(x_2)$

مثلا تابع: $f(x)=6$

*** توابع یک به یک:**

تابعی است که هیچ دو مولفه دوم آن مانند یکدیگر نباشند.یعنی: $\forall x_1,x_2\in D_f, f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$

* مثال: ثابت کنید تابع $y=3x+1$ یک به یک است.

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow 3x_1+1=3x_2+1\Rightarrow 3x_1=3x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

*** تابع وارون:**

وارون تابع f را با f^{-1} نشان می دهیم و تعریف می کنیم: $f^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$

تذکر: تابع f در صورتی وارون پذیر است که یک به یک باشد و داریم: $(fof^{-1})(x)=(f^{-1}of)(x)=I$

تذکر: نمودار تابع f با معکوسش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارنند.

* مثال: ثابت کنید تابع $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ وارون پذیر است، سپس وارون آن را بیابید.

$$y_1=y_2\Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-2}=\frac{x_2+1}{x_2-2}\Rightarrow x_1x_2-2x_1+x_2-2=x_1x_2+x_1-2x_2-2$$

$$\Rightarrow -3x_1=-3x_2\Rightarrow x_1=x_2$$

$$y=\frac{x+1}{x-2}\Rightarrow yx-2y=x+1\Rightarrow yx-x=2y+1\Rightarrow x(y-1)=2y+1\Rightarrow x=\frac{2y+1}{y-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2y+1}{y-1}$$

www.mclass.ir جعفری کیا

*** توابع چند جمله ای:**

صورت کلی یک تابع چند جمله ای بصورت زیر است:

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x^1,(a_1,a_2,...,a_n\in\mathbb{R})$$

* تذکر: بر اساس مقدار n درجه چند جمله ای تعیین می شود. مثلا: $y=x+1$ چند جمله ای درجه یک است.

* تذکر: اگر داشته باشیم: $n=0$ تابع ثابت و اگر $n=1$ خط راست و اگر $n=2$ سهمی تشکیل می شود.

*** توابع متناوب:**

تابع f متناوب نامیده می شود هرگاه عددی حقیق نظیر T داشته باشیم که: $\forall x\in D_f\Rightarrow f(x+T)=f(x)$

کوچکترین مقدار T با خاصیت بالا را دوره تناوب تابع می نامیم.

* مثال: دوره تناوب توابع $Cos(ax+b),Sin(ax+b)$ برابر $\frac{2\pi}{a}$ می باشد. زیرا:

$$Sin(a(x+\frac{2\pi}{a})+b)=Sin(ax+2\pi+b)=Sin(ax+b)$$

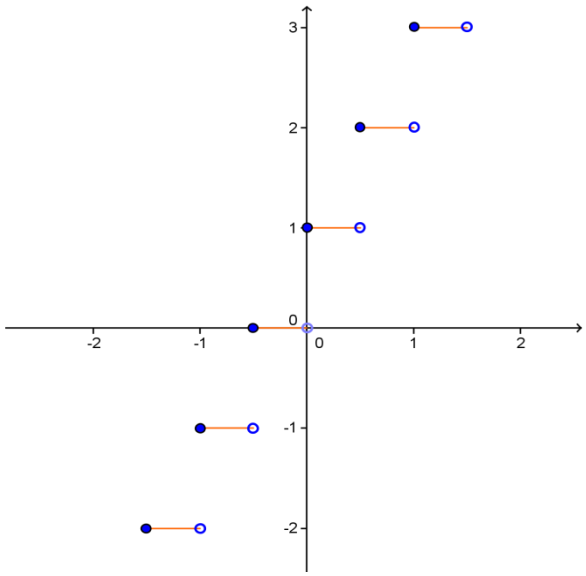
$$Cos(a(x+\frac{2\pi}{a})+b)=Cos(ax+2\pi+b)=Cos(ax+b)$$

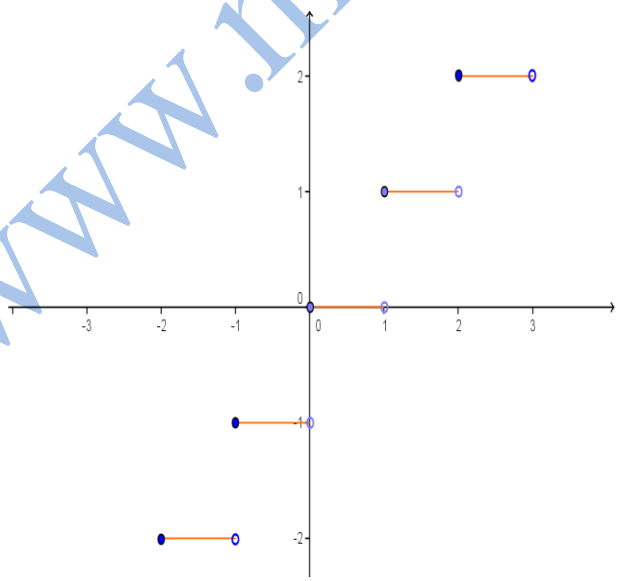
*** توابع پله ای و جزء صحیح:**

توابعی که آن ها را بتوان بر اساس دامنه یشان به بازه هایی دسته بندی کرد که در هر بازه مقداری ثابت باشند، پله ای نامیده میشوند.

و همچنین تابعی که به هر عدد حقیقی جزء صحیح آ ن را نسبت دهد تابع جزء صحیح نامیده می شود و به صورت زیر تعریف می شود: $f(x)=[x]$ و داریم: $D_f=\mathbb{R},R_f=\mathbb{Z}$

* مثال: توابع $y=[2x]+1,y=[x]$ را رسم کنید.





www.mclass.ir
جعفری کیا